

ASOCIACION TECNICA ESPAÑOLA DEL PRETENSADO

AVELINO SAMARTIN QUIROGA

**vibraciones en puentes
pretensados de ferrocarril**

Artículo publicado en el n.º 117
de la Revista Hormigón y Acero

4.º trimestre 1975

Depósito legal: M. Sep. 853 - 1958

vibraciones en puentes pretensados de ferrocarril

AVELINO SAMARTIN QUIROGA
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Dentro de las posibles acciones dinámicas sobre puentes (viento, seísmos, frenados, etcétera), sólo se va a considerar aquí el impacto de la sobrecarga, es decir, la influencia dinámica que aparece al circular por los puentes cargas móviles. Este importante problema es clásico en la ingeniería, ya que se remonta a los primeros años del transporte por ferrocarril, como puede comprobarse en la bibliografía que acompaña a estas notas.

A continuación se resumen, casi en esquema, los aspectos más importantes que aparecen al considerar este tema.

1. En general, estudios teóricos y experimentales tienen que combinarse, si se desean obtener resultados y conclusiones prácticas para el proyecto. En efecto, si se utilizan solamente pruebas y ensayos de carga sobre puentes reales, se obtienen normalmente diagramas de puntos con ninguna aparente conexión entre ellos. Por otra parte, la especulación teórica, a veces no capta totalmente la realidad física del fenómeno del impacto y exige para su aplicación el conocimiento previo de un conjunto de valores dinámicos característicos.

2. Un estudio estructural dinámico puede producir los siguientes tipos de resultados:

2.1. Historia temporal de una respuesta (flecha, esfuerzo, reacción o fuerza de contacto entre carga móvil y puente).

Generalmente la historia temporal consiste en la obtención para una determinada sección de la variación de una respuesta dinámica a lo largo del tiempo. A veces tiene interés la fotografía de la respuesta dinámica, es decir, la variación de la respuesta a lo largo del puente en un instante determinado.

2.2. Impacto.

Este término puede referirse a una sección específica o a todo el puente.

En el primer caso se denomina impacto al valor máximo de la relación respuesta dinámica/respuesta estática.

Si se desea determinar el coeficiente de impacto para todo el puente, dos tipos de funciones pueden considerarse:

$$I_{abs} = \frac{\text{máxima respuesta dinámica en el puente}}{\text{máxima respuesta estática en el puente}}^{-1}$$

$$I_{max} = \text{máximo } x \left[\frac{\text{máxima respuesta dinámica de la sección } x}{\text{máxima respuesta estática de la sección } x} \right]^{-1}$$

El conocimiento de I_{ab} puede tener interés en vigas de resistencia uniforme, en cambio, la consideración de I_{\max} puede ser necesaria en vigas no uniformes.

3. Se considera primeramente el caso particular de un puente simplemente apoyado bajo la actuación de una sola carga concentrada móvil, con velocidad constante.

Los parámetros que se consideran son:

a) *Con respecto al puente.*

Características elastomecánicas E, I .

Masa unitaria ρ .

Amortiguamiento externo η e interno η_1 .

b) *Con respecto a la carga.*

Masa m .

Velocidad v .

Características de muelle k .

Amortiguamiento de fricción ξ .

Así, pues, fórmulas empíricas o teóricas que deduzcan un coeficiente de impacto I en función únicamente de la luz del puente no son las más adecuadas.

4. Las ecuaciones del movimiento correspondiente al caso que se estudia pueden ser obtenidas considerando la figura 1.

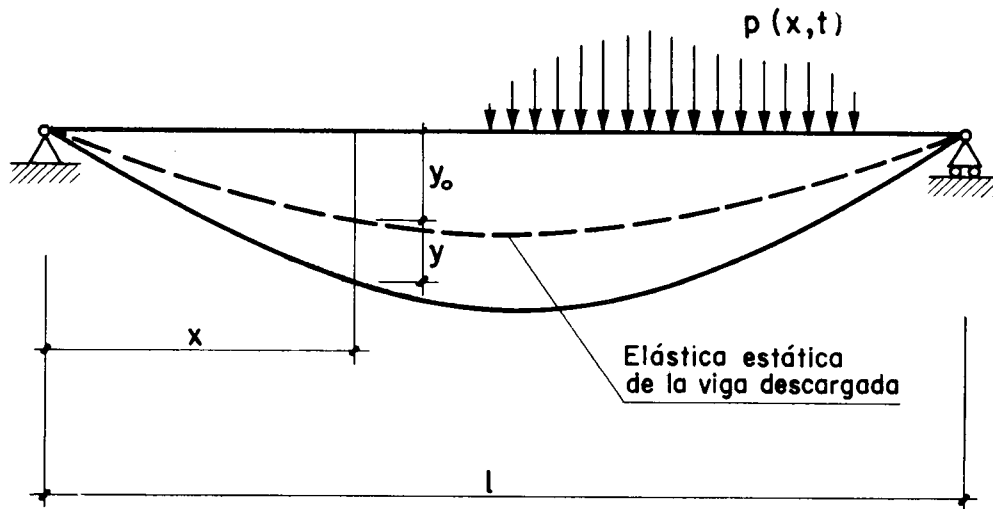


Figura 1.

Equilibrio:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) = q(x, t)$$

Siendo M el momento flector, que puede ponerse en función de la curvatura de la viga $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ y de la velocidad de la deformación longitudinal:

$$\eta_1 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2}$$

es decir:

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2}$$

$q(x, t)$ es la fuerza unitaria, que considerando las acciones actuantes $p(x, t)$ y las fuerzas de inercia y amortiguamiento viscoso:

$$- \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad y \quad - \eta \frac{\partial y}{\partial t}$$

respectivamente, se obtiene fácilmente:

$$q(x, t) = p(x, t) - \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial y}{\partial t}$$

La ecuación de equilibrio se convierte en:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial y}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = p(x, t)$$

Si $p(x, t)$ es la fuerza de contacto producida por una masa concentrada móvil m , que se mueve a velocidad constante v , se deduce de la figura 2:

$$p(x, t) = P(t) \delta(x - x_p)$$

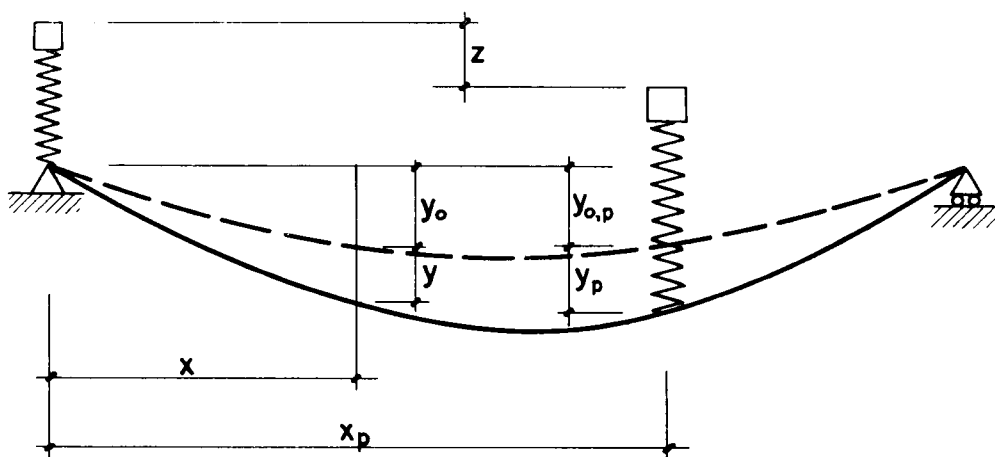


Figura 2.

con:

$$x_p = vt$$

$\delta(x - x_p)$ distribución de Dirac.

$$P(t) = k(z - y_{0,p} - y_p) + mg \pm \xi mg = mg - m \frac{dz^2}{dt^2}$$

Se considera $\pm \xi$ si

$$\frac{d}{dt} [k(z - y_{0,p} - y_p)] > (ó y - \xi) > 0$$

y $-\xi$ en caso contrario; o lo que es equivalente, supuesto k y m positivos, a la ecuación anterior escrita en la forma:

$$P(t) = k(z - y_{0,p} - y_p) + m g + \epsilon \xi m g = m g - m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

con:

$$\epsilon = - \frac{d^3 z}{dt^3} ; \quad \frac{d^3 z}{dt^3}$$

5. Para un estudio general del problema es conveniente introducir el siguiente conjunto de variables y parámetros adimensionales:

Variables:

$$\bar{x} = \frac{\pi}{l} x, \quad \bar{t} = \frac{\pi}{l} v t, \quad \bar{y} = \frac{\pi^4 E I}{2 \rho l^4 g} y, \quad \bar{z} = \frac{\pi^4 E I}{2 \rho l^4 g} z$$

Parámetros:

$$\bar{m} = \frac{m}{\rho l}, \quad \eta = \frac{\eta l^2}{2 \pi^2 \sqrt{\rho E I}}, \quad \eta_1 = \frac{\eta_1 \pi^2}{2 l^2 \sqrt{\rho E I}}, \quad \alpha = \frac{v l}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{E I}}, \quad \mu = \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{k \rho}{m E I}}$$

El rango de variación de los anteriores parámetros, obtenidos según (3) de 46 puentes de ferrocarril con luces entre 7 y 100 metros, es:

$$\begin{aligned} 0 < \bar{m} < 5 \\ 0 < \alpha < 0,15 \\ 0 < \bar{m} \alpha^2 < 0,1 \\ 0 < \bar{m} \mu^2 < 1 \\ 0 < \bar{\eta} + \bar{\eta}_1 < 1 \\ 0 < \xi < 0,1 \end{aligned}$$

Se ha supuesto una velocidad del móvil $v = 30 \text{ m seg}^{-1} = 108 \text{ km hora}^{-1}$ y una frecuencia propia de la carga de 3 ciclos/seg.

Las ecuaciones del movimiento, considerando las variables adimensionales anteriores, se convierten en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} + 2 \alpha \eta \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} + 2 \alpha \eta_1 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t} \partial x^4} &= \left[\frac{1}{2} - \bar{m} \alpha^2 \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{t}^2} \right] \pi \delta(x - \bar{t}) \\ \bar{z} - y_p - y_{0,p} + \frac{\alpha^2}{\mu^2} \frac{d^2 \bar{z}}{d \bar{t}^2} + \epsilon \frac{\xi}{2 \bar{m} \mu^2} &= 0 \end{aligned}$$

6. La solución analítica de las ecuaciones diferenciales no lineales anteriores con las condiciones iniciales y de contorno correspondientes es en general un problema complicado. Aquí se indican sólo algunos casos especiales importantes.

6.1. Vibraciones libres:

$$P(t) = 0 \quad \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial \bar{x}^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t}^2} + 2\alpha \bar{\eta} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{t}} + 2\alpha \bar{\eta}_1 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}^2} = 0$$

Condiciones de contorno:

$$\bar{y} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2} = 0 \quad \text{para} \quad \bar{x} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{x} = \pi$$

Modos de vibración:

$$y_n = \exp(-c_n \bar{x}) \sin \omega_n \bar{x} \sin n \bar{t}$$

con:

$$c_n = (\bar{\eta} + n^4 \bar{\eta}_1)/\alpha \quad ; \quad \omega_n = \frac{n^2}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\bar{\eta}}{n^2} + n^2 \bar{\eta}_1 \right)^2 \right]^{1/2}$$

Frecuencia fundamental:

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\alpha} [1 - (\bar{\eta} + \bar{\eta}_1)^2]^{1/2}$$

Decrecimiento de amplitudes del primer modo:

$$\exp[-2\pi(\bar{\eta} + \bar{\eta}_1)] [1 - (\bar{\eta} + \bar{\eta}_1)^2]^{-1/2}$$

El significado físico de los parámetros α y μ se deduce fácilmente:

$$\alpha = \frac{\text{Velocidad de la carga}}{2 \times \text{frecuencia del puente} \times \text{luz}}$$

$$\mu = \frac{\text{Frecuencia de la carga}}{\text{Frecuencia del puente}}$$

6.2. Vibraciones forzadas.

Se desarrolla la carga en serie de Fourier; es decir,

$$\delta(\bar{x} - \bar{t}) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \bar{x} \sin n \bar{t}$$

y la flecha de la viga puede ponerse en la forma:

$$\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin n \bar{x}$$

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones de equilibrio se obtiene para el término n -simo ($\sin n \bar{x}$) la expresión:

$$n^4 q_n + 2\alpha(\bar{\eta} + n^4 \bar{\eta}_1) \dot{q}_n + \alpha^2 \ddot{q}_n = (1 - 2\bar{m}\alpha^2 \ddot{z}) \sin n \bar{t}$$

con:

$$\frac{d}{dt} \equiv \quad .$$

y la condición del equilibrio de la carga móvil se convierte en:

$$\bar{z} - \sum_{n=0}^{\infty} q_n \operatorname{sen} n \bar{t} - \bar{y}_{0,t} + \frac{\alpha^2}{\mu^2} \ddot{\bar{z}} + \epsilon \frac{\xi}{2 \bar{m} \mu^2} = 0$$

Se estudian varios casos de carga particulares:

a) Caso estático $\alpha \rightarrow 0$:

$$n^4 q_n = \operatorname{sen} n t$$

resulta:

$$\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \operatorname{sen} n \bar{t} \operatorname{sen} n \bar{x}$$

b) Masa de la carga despreciable (problema de Bleich) $\bar{m} = 0$:

$$n^4 q_n + 2 \alpha (\eta + n^4 \bar{\eta}_1) \dot{q}_n + \alpha^2 \ddot{q}_n = \operatorname{sen} n t$$

ecuación diferencial de coeficientes constantes con carga armónica, que puede resolverse fácilmente mediante la integral de Duhamel. En el caso particular de amortiguamiento nulo se obtiene la solución dada por Timoshenko:

$$q_n = \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha^2)} \left[\operatorname{sen} n \bar{t} - \frac{\alpha}{n} \operatorname{sen} \frac{n^2}{\alpha} \bar{t} \right]$$

y la respuesta es:

$$\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha^2)} \left[\operatorname{sen} n \bar{t} - \frac{\alpha}{n} \operatorname{sen} \frac{n^2}{\alpha} \bar{t} \right] \operatorname{sen} n \bar{x}$$

c) Masa de la viga despreciable en comparación con la masa de la carga; es decir, $\bar{m} \rightarrow \infty$ y $\bar{m} \alpha^2$, $\bar{m} \mu^2$ finitos ($\alpha = 0$) (problema de Stokes).

Resulta:

$$n^4 q_n = (1 - 2 \bar{m} \alpha^2 \ddot{\bar{z}}) \operatorname{sen} n \bar{t}$$

y la condición de equilibrio de la fuerza es:

$$\bar{z} - (1 - 2 \bar{m} \alpha^2 \ddot{\bar{z}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n \bar{t}}{n^4} - \bar{y}_{0,t} + \epsilon \frac{\xi}{2 \bar{m} \mu^2} = 0$$

Si se denomina:

$$T_1(\bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n \bar{t}}{n^4} = \frac{1}{6} \bar{t}^2 (n - \bar{t})^2$$

la ecuación anterior se convierte en:

$$\ddot{z} + (1 + 2 \bar{m} \mu^2 T_1) \frac{\alpha^2}{\mu^2} = \ddot{y}_0 + \ddot{t} + T_1 - \epsilon \frac{\xi}{2 \bar{m} \mu^2} = 0$$

Ecuación diferencial obtenida por Zimmermann para el caso de $\bar{m} \mu^2 = \infty$.

d) El caso general puede ser tratado aproximadamente mediante diferentes técnicas de cálculo (método de Inglis, funciones de forma generalizadas, método de Rinkert, diferencias finitas, etc.) que por su extensión no se presentan aquí.

7. La generalización del problema anterior, a situaciones de vigas continuas y/o de sección variable, exige en general métodos numéricos. Aquí se describen brevemente las ecuaciones que aparecen al aplicar la conocida técnica de elementos finitos.

Considerando la figura 3, las ecuaciones del movimiento se deducen según la referencia 3:

$$M \ddot{Y} + C \dot{Y} + K Y = P(t) \quad (7.1)$$

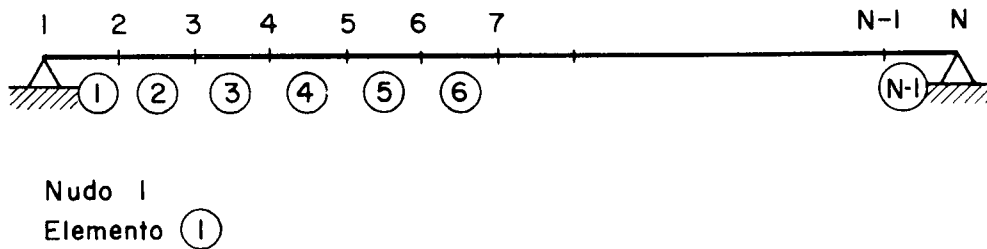


Figura 3.

Las matrices de rigidez K , masa M y amortiguamiento C se obtienen por combinación de las correspondientes matrices elementales del elemento genérico n de la figura 4, cuyos términos son, respectivamente,

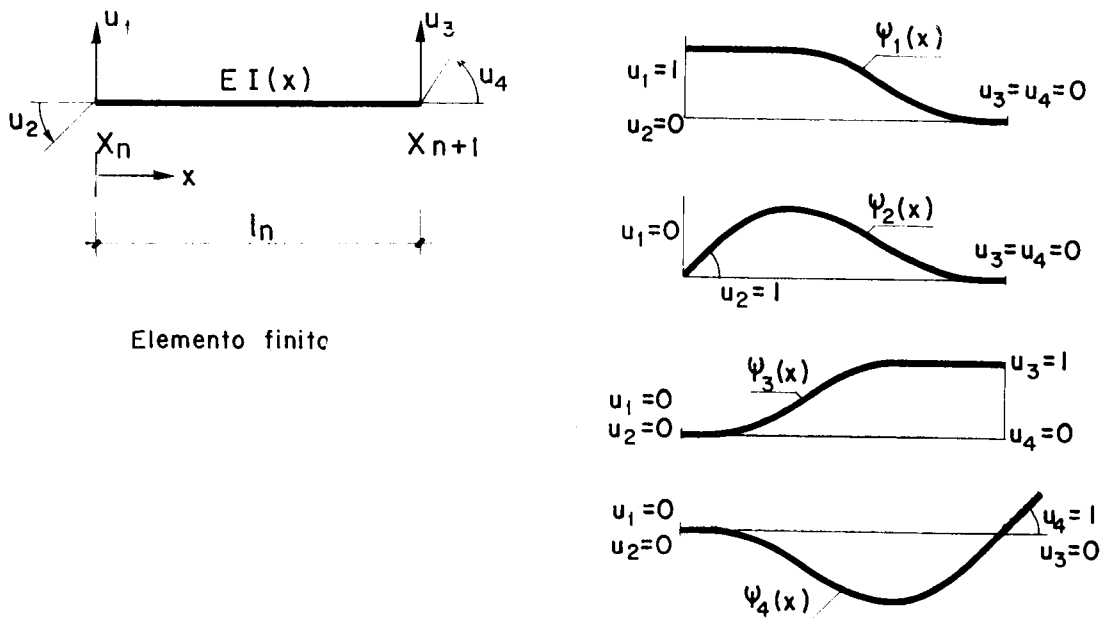


Figura 4.

Funciones de interpolación

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= l_n \int_0^1 E I(\lambda) \Phi_i''(\lambda) \Phi_j''(\lambda) d\lambda \\
m_{ij} &= l_n \int_0^1 \rho(\lambda) \Phi_i(\lambda) \Phi_j(\lambda) d\lambda \\
c_{ij} &= l_n \int_0^1 \eta(\lambda) \Phi_i(\lambda) \Phi_j(\lambda) d\lambda + l_n \int_0^1 \eta_1(\lambda) I(\lambda) \Phi_i''(\lambda) \Phi_j''(\lambda) d\lambda \\
i_{ij} &= 1, 2, 3, 4 \\
l_n &= x_{n+1} - x_n \\
\lambda &= \frac{x - x_n}{l_n}
\end{aligned}$$

Φ_i y Φ_j funciones de interpolación que en este caso pueden adoptar las expresiones:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda) &= 1 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3 \\
\Phi_2(\lambda) &= \lambda(1 - \lambda)^2 l_n \\
\Phi_3(\lambda) &= 3\lambda^2 - 2\lambda^3 \\
\Phi_4(\lambda) &= -\lambda^2(1 - \lambda) l_n
\end{aligned}$$

Las matrices cuadradas K , M y C tienen dimensiones $N \times N$ y las matrices columnas Y y $P(t)$, dimensión $(N \times 1)$, siendo N el número total de grados de libertad considerados.

Si se estudia el caso de masa concentrada móvil a velocidad constante v se tiene:

$$P(t) = \left(m g - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) D(t)$$

con:

$$\begin{aligned}
D(t) &= \{d_i(t)\} \text{ con } d_i(t) \text{ de dimensión } (2 \times 1) \\
d_i(t) &= 0 \quad \text{si} \quad i \neq v \\
d_v(t) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(\lambda) \\ \Phi_2(\lambda) \end{bmatrix} \quad d_{v+1} = \begin{bmatrix} \Phi_3(\lambda) \\ \Phi_4(\lambda) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

con:

$$\lambda = (vt - x_v) / (x_{v+1} - x_v)$$

v es el máximo valor de n tal que $vt - x_n > 0$.

Y la ecuación de equilibrio de la fuerza puede ponerse en la forma:

$$-m \frac{d^2 z}{dt^2} = k(z - D^T(t)Y - D^T(t)Y_0) + \xi mg \quad (7.2)$$

con Y_0 un vector conocido de desplazamiento en los nudos debido a la carga estática.

Las ecuaciones (7.1) y (7.2) pueden reunirse en la ecuación única matricial de dimensión $N + 1$:

$$M^* \ddot{Y}^* + C^* \dot{Y}^* + K^* Y^* = P^*(t) \quad (7.3)$$

con:

$$M^* = \begin{bmatrix} M & m D(t) \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad C^* = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \xi m g \end{bmatrix}; \quad K^* = \begin{bmatrix} K & 0 \\ k D'(t) & k \end{bmatrix}$$

$$Y^* = \begin{bmatrix} Y \\ z \end{bmatrix}; \quad P^*(t) = \begin{bmatrix} m g D(t) \\ D'(t) Y_0 \end{bmatrix}$$

M^* , C^* y K^* matrices $(N+1) \times (N+1)$, Y^* y $P^*(t)$ $(N+1) \times 1$

La resolución del sistema no lineal (7.3) puede realizarse utilizando un método en diferencias estable, fácilmente programable para computador. Aquí se describe, como ejemplo, el método directo de Euler-Gauss, con un intervalo de tiempo constante Δt , Y_0^* e Y_1^* , valores inicial y final de Y^* :

$$\ddot{Y}_1^* = \frac{4}{\Delta t^2} Y_1^* - A$$

$$\dot{Y}_1^* = \frac{2}{\Delta t} Y_1^* - B$$

$$\bar{K}_1^* Y_1^* = \bar{P}_1^*$$

con:

$$A = \frac{4}{\Delta t^2} (Y_0^* + \Delta t \dot{Y}_0^*) + \ddot{Y}_0^*$$

$$B = \dot{Y}_0^* + \frac{2}{\Delta t} Y_0^*$$

$$\bar{K}_1^* = \frac{4}{\Delta t^2} M_1^* + \frac{2}{\Delta t} C_1^* + K_1^*$$

$$\bar{P}_1^* = P_1^* + M_1^* A + C_1^* B$$

La generalización de las ecuaciones (7.1) y (7.2) anteriores, al caso de varias masas concentradas móviles, así como la consideración de cargas distribuidas móviles es inmediata, resultando en general un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo indicado (7.3).

La extensión de la teoría anterior, a otros tipos estructurales muchas veces más adecuados para representar el comportamiento de un puente, tales como placas, láminas plegadas, etc., puede realizarse de forma análoga. En las figuras 5 a 11 puede verse un ejemplo de una placa rectangular simplemente apoyada pesante con una carga puntual móvil y excéntrica. Los resultados han sido obtenidos mediante el programa NASTRAN.

8. Se comprueba que el problema del impacto en un puente real, con unas condiciones geométricas y de apoyo generales, bajo la actuación de un tren de cargas dado, puede ser resuelto numéricamente, al menos en teoría. Sin embargo, conviene insistir que normalmente, en un estudio dinámico, la mayor dificultad, no reside en la determinación de la relación excitación-respuesta, sino en la definición de la excitación y en el conocimiento de las características elastodinámicas de la estructura. De ahí la necesidad de considerar los problemas correspondientes que aparecen en el cálculo dinámico probabilístico y en la identificación estructural, de los cuales se van a comentar brevemente su planteamiento y posibilidades.

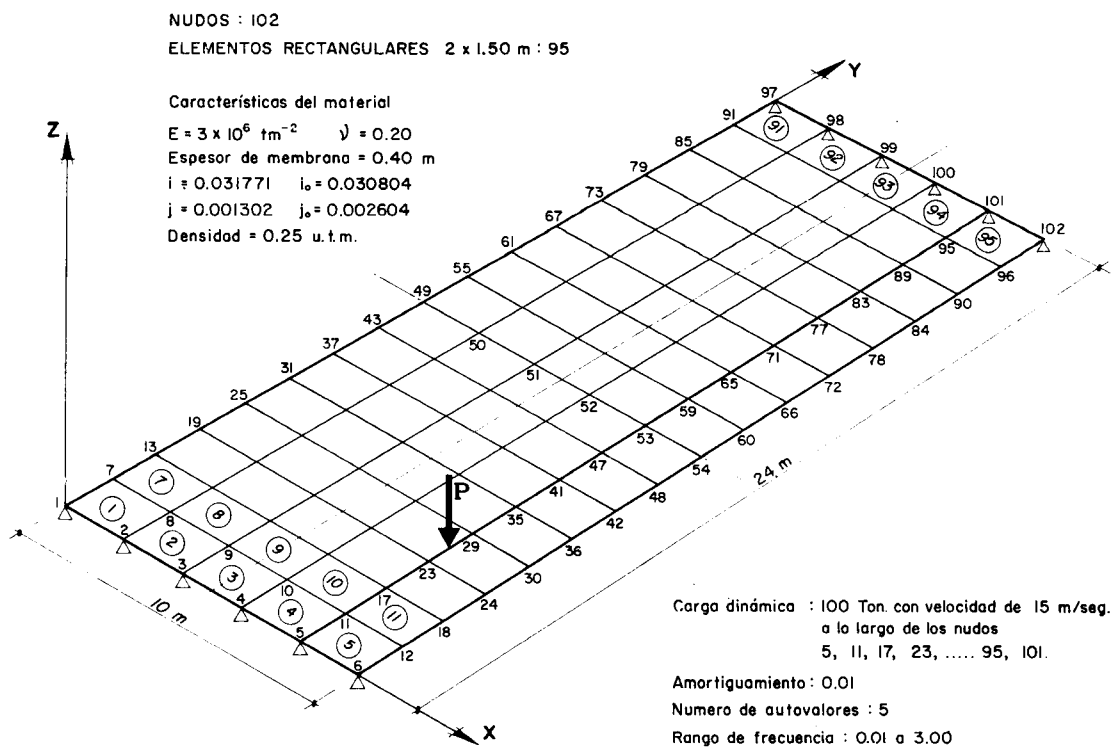


Figura 5.

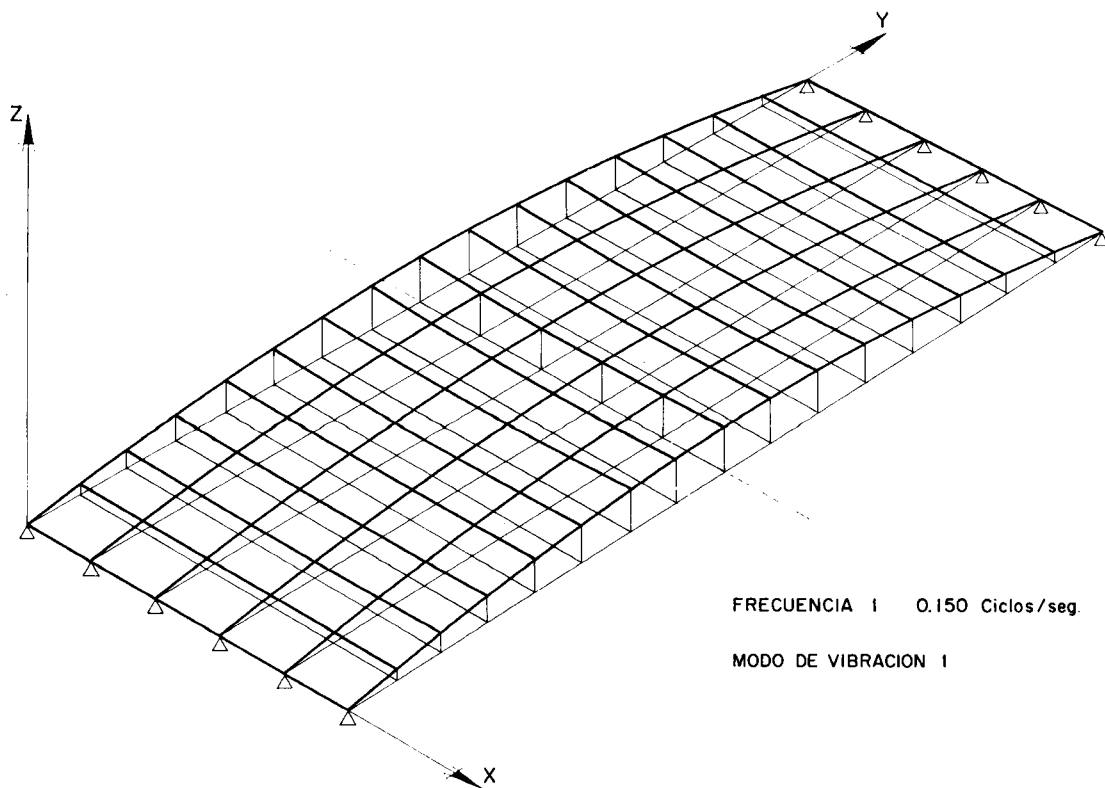


Figura 6.

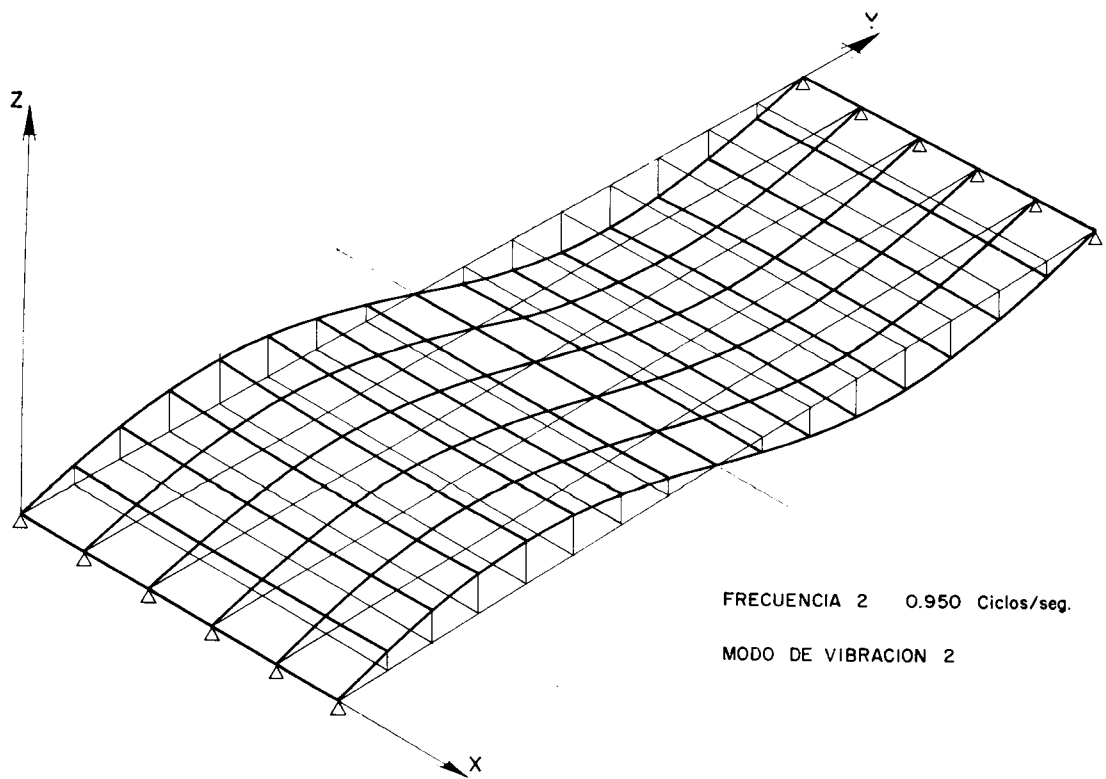


Figura 7.

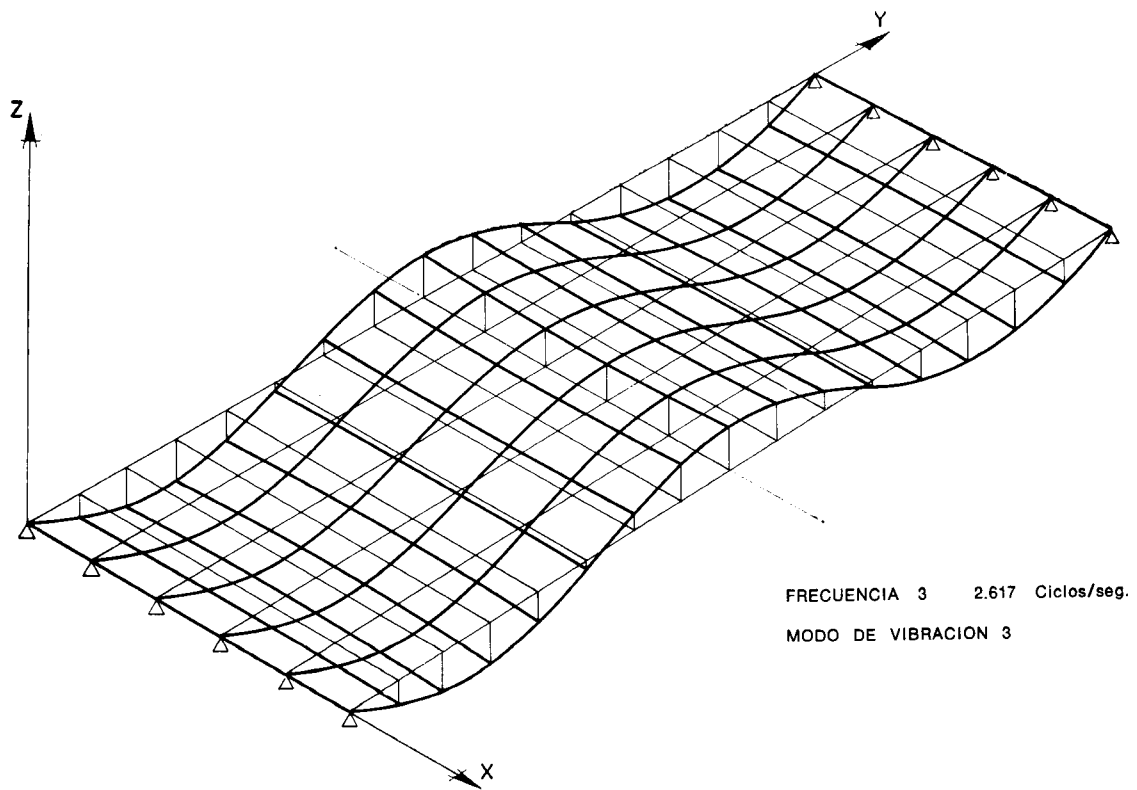


Figura 8.

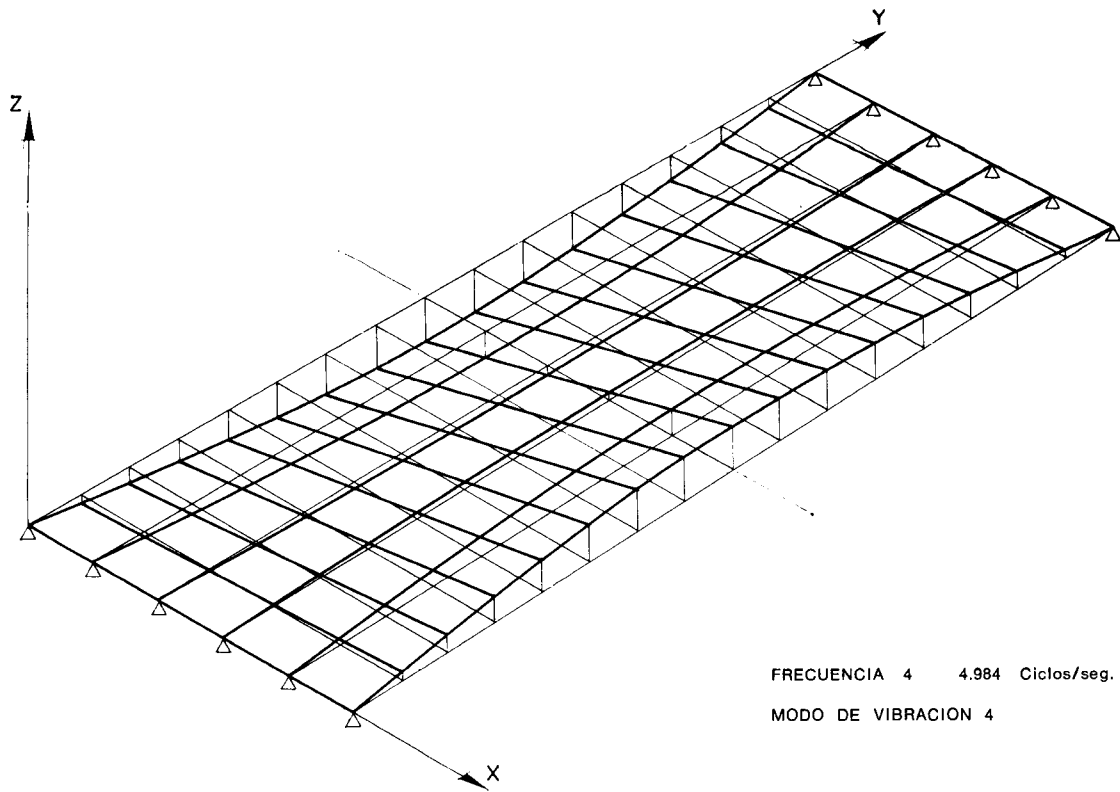


Figura 9.

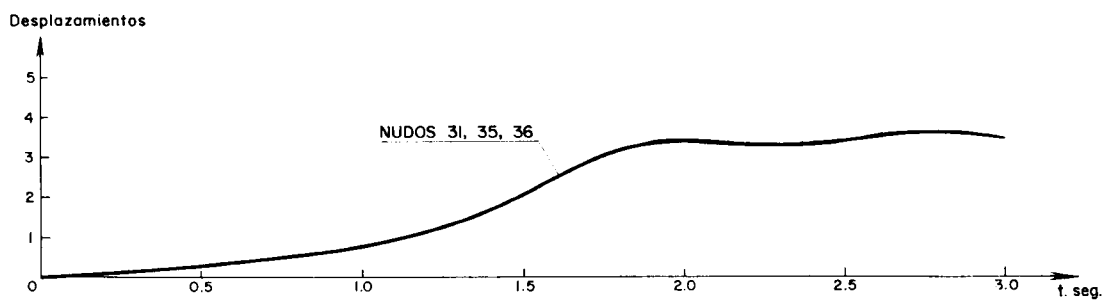
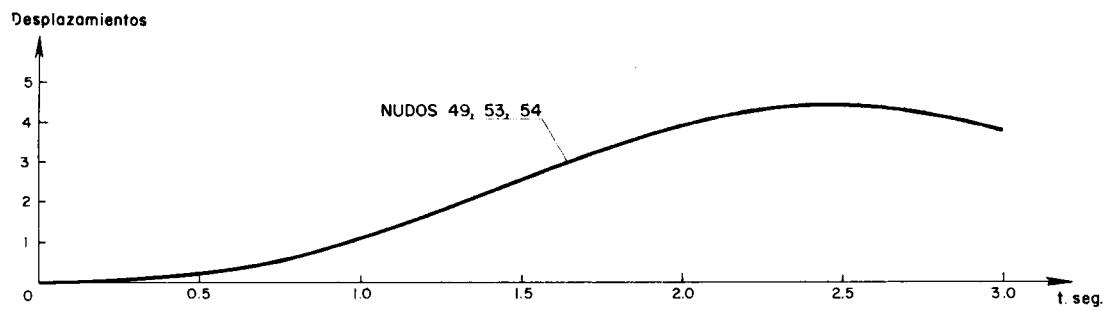


Figura 10.

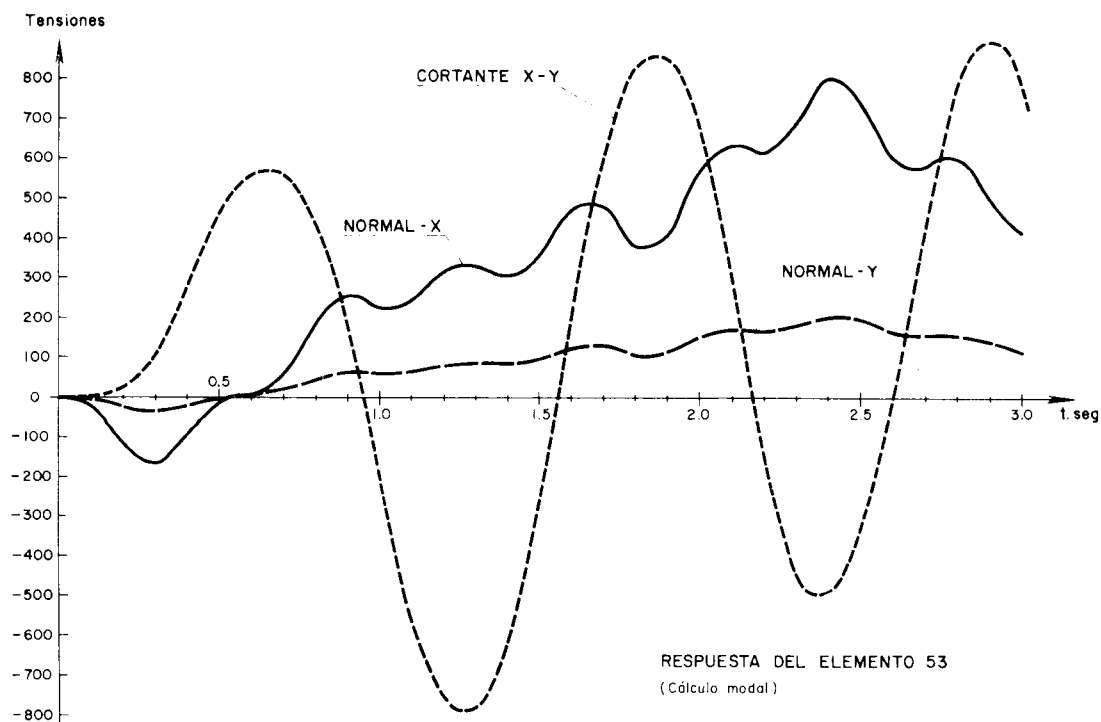


Figura 11.

9. La determinación de las características de una estructura a partir de un conjunto de observaciones experimentales constituye el problema fundamental de la identificación.

En términos generales este problema puede ser formulado matemáticamente como sigue:

Sean las ecuaciones dinámicas de equilibrio del puente de la forma:

$$M \ddot{Y} + G(Y, \dot{Y}, a) = P$$

con Y , el vector de desplazamientos; P , las fuerzas exteriores; $G(Y, \dot{Y}, a)$ es una función vectorial que representa las fuerzas elásticas y disipativas producidas al deformarse el puente.

Las fuerzas P y un vector de observaciones W cuyos componentes son historias temporales a lo largo de un período de tiempo T de todos o alguno de los desplazamientos o/y sus derivadas en los nudos del puente.

Con la anterior información, la determinación de G de forma que se obtenga el mejor acuerdo entre los resultados medidos W y los calculados Y , constituye un problema de identificación. En general, se supone que G pertenece a una cierta clase de funciones, que asegure es lo suficientemente amplia para captar todos los efectos a simular.

En el estudio del impacto en puentes, las tensiones y esfuerzos que se producen son generalmente una pequeña proporción de los estáticos por lo que la hipótesis lineal para $G(Y, \dot{Y}, a)$ es perfectamente admisible. Sin embargo, en otros casos, como terremotos, el estudio dinámico que debe plantearse exige modelos no lineales, como materiales viscosos diferenciales, materiales hereditarios o modelos bilineales con histéresis.

La función vectorial $G(Y, \dot{Y}, a)$ tiene una forma paramétrica en términos de un

vector incógnita $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ que se determina al minimizar una función error del tipo:

$$\text{Observación} - \text{Cálculo} = \text{Error en el tiempo } T.$$

Este problema puede ser considerado dentro de una teoría general de control. Detalles de su resolución pueden verse en la bibliografía.

10. La utilización de las técnicas de identificación permite obtener para un puente construido sus características intrínsecas dinámicas o bien extrapolar los valores deducidos en puentes construidos a otros similares estructuralmente y en fase de proyecto. Sin embargo, el problema adicional que plantea el cálculo dinámico, consiste en que una acción dinámica no se repite por lo general. Es decir, el paso de un vehículo por un puente supone una acción $P(t)$ dependiente de varias variables. Si se repite la experiencia del paso del vehículo anterior por el mismo puente, las fuerzas $P(t)$ que se generan no son iguales a las anteriores. Fenómenos como no uniformidad de la velocidad, rugosidad del camino, efecto de *hammer-blow*, juntas, etc., son causa de dicha variación. La situación se muestra aún más patente, en otras acciones dinámicas, tales como ráfagas de viento, seísmos o frenado. Se comprende la necesidad de un cálculo no determinístico de vibraciones. Así, pues, cada acción $P(t)$ puede considerarse como función muestra $P^k(t)$ de un proceso aleatorio.

De un modo más general, el conjunto de todas las acciones actuantes en un puente $P^{(k)}(x, t)$ con $k = 1, 2, \dots$, constituyen un proceso aleatorio $P(x, t)$ de dos variables. Para caracterizar este proceso aleatorio sería necesario, teóricamente, conocer todas las densidades de probabilidad de m variables p_{ij} , siendo:

$$P_{ij} = p(x_i, t_j) \text{ la acción aplicada en el punto } x_i \text{ en el instante } t_j$$

y para diferentes valores de $m = 1, 2, 3, \dots$

Si el proceso aleatorio es gaussiano sería suficiente conocer las funciones de probabilidad para $m = 1$ y $m = 2$ únicamente. En particular, si el proceso es además estacionario, lo que indica cierta independencia del tiempo de las distribuciones anteriores, basta conocer para caracterizar el proceso $p(x, t)$ los siguientes valores:

$$E | p_{ij} | = \text{media a través del conjunto de funciones muestras } p^k(x, t) \text{ para un } x_i \text{ y } t_j \text{ determinados} = p_i$$

$$\begin{aligned} E [p_{ij} p_{i_0 j_0}] &= E [p(x_i, t_j) p(x_{i_0}, t_{j_0})] = \\ &= E [p(x_i, t_j) p(x_{i_0}, t_j + \tau)] = R(x_i, x_{i_0}, \tau) = R_{i, i_0}(\tau) \end{aligned}$$

con:

$$\tau = t_{j_0} - t_j$$

La función $R(x_i, x_{i_0}, \tau)$ se denomina la correlación cruzada en x_i, x_{i_0} del proceso.

Así, pues, \bar{p}_i y $R_{i, i_0}(\tau)$ caracterizan completamente desde un punto de vista estadístico al proceso aleatorio $p(x, t)$ supuesto este gaussiano y estacionario (lo que constituye una hipótesis usual en vibraciones de puentes). A veces, se utiliza la función $S_{i, i_0}(p)$ que se denomina función espectral cruzada de energía, transformada de Fourier de $R_{i, i_0}(\tau)$.

Si el sistema dinámico que describe el comportamiento del puente es lineal la respuesta $Y(x, t)$ constituye un proceso aleatorio gaussiano y estacionario cuyas características estadísticas son fácilmente deducibles de las de excitación.

En el caso general, no lineal, una técnica de Montecarlo puede ser utilizada, para engendrar elementos muestra de la excitación $p(x, t)$ y obtener determinísticamente uno a uno elementos de muestra de la respuesta $Y(x, t)$.

11. El análisis estadístico de la respuesta constituye un problema muy importante, particularmente en lo que se refiere a la definición del tipo de fallo estructural, ya que es aquí donde las características del material juegan un papel. En efecto, roturas por primer paso (materiales frágiles, no usuales en los puentes) o roturas por acumulación de daños (que pueden corresponder al fenómeno de fatiga del hormigón pretensado) son importantes a efectos de evaluar la probabilidad de rotura.

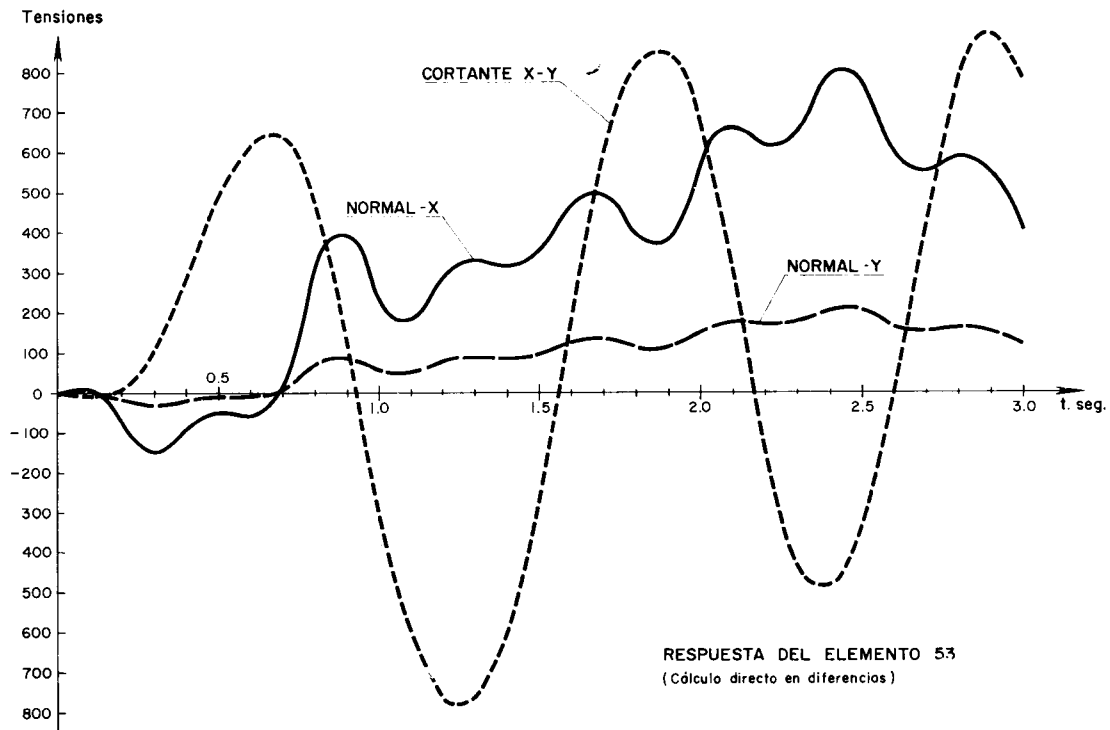


Figura 12.

En general, estos problemas exigen un conocimiento previo de la distribución de cruces de las respuestas por un umbral y de su distribución de picos. Normalmente la rotura por fatiga se estudia mediante la fórmula $N S^b = c$, en donde N representa el número de ciclos hasta la rotura de fatiga, S la amplitud de la tensión (respuesta) y b, c son constantes positivas del material.

Adicionalmente se suele introducir el postulado de Palmgren-Miner que supone un fenómeno acumulativo del daño lineal; es decir, el daño Δs_1 producido por n_1 ciclos de amplitud S_1 es:

$$\Delta s_1 = \frac{n_1}{N} \quad (n_1 < N)$$

siendo N_1 el número de ciclos que produce la rotura con la tensión S_1 .

Si las tensiones son variables el daño total es:

$$\Delta = \sum \Delta s_i = \sum \frac{n_i}{N} = c^{-1} \sum n_i S_i^b$$

Conviene tener en cuenta que el hormigón pretensado presenta un diferente comportamiento de fatiga, según se encuentre en la situación de pretensado parcial o total. Este hecho complica la formulación anterior del estudio de la respuesta, que debe incluir el estudio del fenómeno de rotura por primer paso. Ver referencia 17.

12. Como resumen de estas notas se pueden deducir las siguientes conclusiones:

a) La determinación del coeficiente de impacto en puentes de ferrocarril es un problema de formulación compleja, que exige un planteamiento en general estocástico si se desean obtener resultados reales.

b) En la actual reglamentación española de puentes de ferrocarril que data del año 1956, el coeficiente de impacto para puentes de hormigón, probablemente sea excesivo, ya que la técnica del hormigón pretensado no tenía en aquel entonces su desarrollo actual. Por otra parte, el coeficiente de impacto se deduce exclusivamente en la Instrucción como función de la luz del puente.

En la referencia 20 se indica otra fórmula práctica que considera el coeficiente de impacto dependiente de la luz, velocidad y frecuencia propia del puente. Sin embargo, el aspecto de la fatiga no ha sido considerado.

c) Parece, pues, conveniente una revisión del coeficiente de impacto a aplicar a puentes pretensados de ferrocarril, que considere el problema en toda su amplitud técnica y experimentalmente.

El nivel tecnológico y la economía del país podían ser razones a considerar para iniciar este tipo de estudios.

BIBLIOGRAFIA

TEXTOS GENERALES

1. TIMOSHENKO, S.: "Vibration Problems in Engineering". *Van Nostrand*. New York, 1955.
2. HACAB, M. A., y ALARCÓN, E.: "Elementos de dinámica aplicados a las estructuras". Edix. Madrid, 1971.
3. COLEGIO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS: "Cálculo dinámico en la Ingeniería Civil". C.P.P.E., 1975.
4. COMO y GRECO: "Comportamientos dinámicos de vigas pretensadas de sección esbelta". *Giornale del Genio Civile*. Enero 1968.

SOLUCIONES ANALITICAS DETERMINISTICAS

5. ZIMMERMANN, H.: "Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last". *Zentralblatt der Bauverwaltung*. Berlin, enero 1896.
 6. TIMOSHENKO, S.: "Vibration Problems in Engineering". U.S.A., 1928.
 7. DEPARTMENT OF SCIENTIFIC AND INDUSTRIAL RESEARCH: "Report of the bridge Stress Committee". London, 1928.
 8. INGLIS, C. E.: "A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges". Cambridge, 1934.
 9. LOONEY, CHARLES T. G.: "Impact on Railway Bridges". *University of Illinois Bulletin*, Vol. 42, Number 19, 1944.
 10. HUNLEY, J. B.: "Impact in Steel Railway Bridges of Simple Span". *Bulletins of the American Railway Engineering Association*. No. 380, 1935.
- Number 422: "Description and Analysis of Bridge Impact Test Made by the Pennsylvania Railroad at Chester, Pa". 1941.

- Number 433: "Description and Analysis of Bridge Impact Tests Made on Short Steel Bridges Under Diesel-Electric Locomotives". 1942.
- Number 439: "Impact Investigation of a plate Girder Bridge on the Pennsylvania Railroad at Elkton, Md". 1943.
- Number 450: "Description and Analysis of Bridge Impact Tests Made on Short Open and Ballasted Deck Steel Bridges Under Diesel and Steam Locomotives". 1945.
- Number 467: "Investigation of Bridge Impacts with a Mechanical Oscillator". 1947.
- 11. ODMAN SVEN: "Differential Equation for Calculation of Vibrations Produced in Load-bearing Structures by Moving Loads". Preliminary Publication of the Third Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering. Liège, 1948.
- 12. AYRE, FORD and JACOBSEN: "Transverse Vibration of a Two-Span Beam Under Action of a Moving Constant Force". *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 16, 1949.
- 13. HILLERBORG, A.: Dynamic Influences of Smoothly Running Loads on Simply Supported Girders".
- 14. MAUNDER, L.: *Quart. Appl. Math.*, 17, 437, 1960.

IDENTIFICACION

- 15. IBÁÑEZ, P.: "Identification of Dynamic Structural Models from Experimental Data". Report Ucla-Eng. 72-5, Marzo 1972.
- 16. DISTEFANO, N., and RATH, A.: "Modeling and Identification in Non linear Structural Seismic Dynamics". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering".

DINAMICA PROBABILISTICA

- 17. LIN, Y. K.: "Probabilistic Theory of Structural Dynamics". McGraw-Hill, 1967.
- 18. SAMARTÍN, A.: "Vibraciones aleatorias en la Ingeniería Civil". Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. C.P.P.E., 1974.
- 19. PIRNER, M., and SVEJDA, J.: "Response of a beam to moving random loads". Proc. of the Conference on Tower-Shape Structures. IASS. La Haya, 1969.

DISCUSION DE LA NORMA ESPAÑOLA

- 20. ALARCÓN, E.: "Una fórmula práctica para el coeficiente de impacto en puentes de ferrocarril". *Informes de la Construcción*. I.E.T., 1973.

